



# Interpolation de Lagrange et d'Hermite

Rapport détaillé du projet de mathématiques

**Lucas HYOT, Firmin LAUNAY, Simon LLUCH,  
Théophile REY**

ESIREM – Semestre 4

Juin 2023



---

---

## *Consignes*

*Comparer les interpolations de Lagrange et d'Hermite sur des exemples bien choisis de fonctions et d'intervalles. Traiter ces exemples avec Maple. Ces exemples peuvent provenir de mesures physiques.*

---



---

# Table des matières

---

Table des matières	iii
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2 Rappels mathématiques</b>	<b>3</b>
2.1 Interpolation numérique . . . . .	3
2.2 Interpolation de Lagrange . . . . .	3
2.3 Interpolation d’Hermite . . . . .	4
2.3.1 Définition du problème à l’ordre 1 . . . . .	4
2.3.2 Construction . . . . .	4
2.3.3 Extension aux ordres supérieurs . . . . .	5
2.4 Utilisation du logiciel Maple . . . . .	5
<b>3 Applications sur des fonctions mathématiques</b>	<b>7</b>
3.1 Interpolations sur une fonction régulière . . . . .	7
3.1.1 Interpolation de Lagrange . . . . .	7
3.1.2 Interpolation d’Hermite . . . . .	9
3.2 Fonction non dérivable en un point . . . . .	10
3.2.1 Interpolation de Lagrange . . . . .	10
3.2.1.1 Augmentation du nombre de points . . . . .	12
3.2.1.2 Interpolation par parties . . . . .	13
3.2.2 Interpolation d’Hermite . . . . .	14
3.3 Fonction irrégulière . . . . .	15
3.3.1 Interpolation de Lagrange . . . . .	16
3.3.2 Interpolation d’Hermite . . . . .	18
3.3.3 Conclusion . . . . .	20
3.3.3.1 Interpolation de Lagrange . . . . .	20
3.3.3.2 Interpolation d’Hermite . . . . .	20
<b>4 Application sur des mesures physiques</b>	<b>21</b>
4.1 Vitesse lors d’un sprint en vélo . . . . .	21
4.1.1 Interpolation de Lagrange . . . . .	22
4.1.2 Interpolation d’Hermite . . . . .	23
4.2 Copie d’un gigaoctet de données . . . . .	24
4.2.1 Interpolation de Lagrange . . . . .	25
4.2.2 Interpolation d’Hermite . . . . .	26
4.3 Température au cours d’une nuit et d’une matinée . . . . .	27
4.3.1 Interpolation de Lagrange . . . . .	28
4.3.2 Interpolation d’Hermite . . . . .	28
<b>5 Conclusion</b>	<b>31</b>



---

# Introduction

---

L'interpolation est un outil mathématique très puissant permettant de reconstruire une fonction ou un ensemble de données manquantes à partir d'informations partielles ou échantillonnées. On peut ainsi remplacer une courbe ou une fonction par une autre courbe (ou fonction) plus simple, mais qui coïncide avec la première en un nombre fini de points (ou de valeurs) donnés au départ. On y trouve de nombreuses applications dans tous les domaines, notamment l'analyse de données, la modélisation numérique, la simulation ou encore l'analyse des marchés financiers (trading).

Durant la réalisation de ce projet, nous appliquerons ces méthodes d'interpolation à des mesures et fonctions, en nous concentrant sur l'étude et l'application de techniques d'interpolation, et en mettant en évidence les caractéristiques des méthodes de Lagrange et d'Hermite. Ces deux outils, qui portent le nom de leurs mathématiciens respectifs, Joseph-Louis Lagrange et Charles Hermite, ont été inventés respectivement au XVIII<sup>ème</sup> siècle et au XIX<sup>ème</sup> siècle (Hermite). Pour mener à bien notre projet, nous utiliserons le logiciel *Maple*, un outil puissant de calcul symbolique et numérique.

Afin d'étudier un peu plus en détail comment fonctionnent ces méthodes d'interpolation, nous verrons en premier lieu un rappel mathématique avec les définitions, propriétés et théorèmes de ces deux méthodes d'interpolation, suivi d'une application sur des fonctions mathématiques que nous aurons choisies et commentées. Enfin, nous étudierons ce que peuvent apporter ces outils à la physique avec des études de cas concrets et des exemples réels.





---

## Rappels mathématiques

---

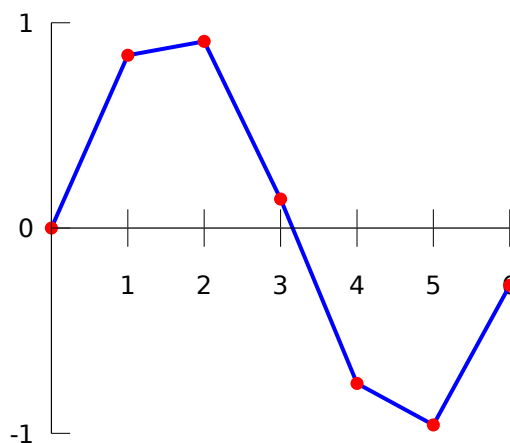
Pour commencer, dans cette partie, nous allons rappeler brièvement les définitions et propriétés des interpolations, et en particulier des méthodes de Lagrange et d'Hermite.

### 2.1 Interpolation numérique

On peut être amené à effectuer une interpolation sur une fonction  $f$  dans plusieurs cas comme par exemple :

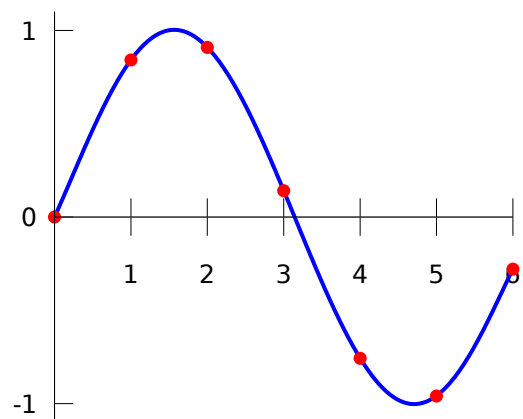
1. La fonction  $f$  est connue, mais est difficile à manipuler. L'approximer a pour but de remplacer  $f$  par une fonction « plus simple » qui est plus facile à intégrer par exemple.
2. La fonction  $f$  n'est pas connue, on ne connaît que ses valeurs en certains points  $x_i$ . Les données  $f(x_i) = y_i$  peuvent, dans ce cas, provenir de mesures par exemple. Le but de l'approximation est alors de trouver une représentation synthétique de ces données expérimentales.

Il existe plusieurs méthodes d'interpolation possédant chacune leurs avantages et inconvénients, comme les deux méthodes de la figure 2.1.



(a) Interpolation linéaire

Source: Berland, Public domain, via Wikimedia Commons



(b) Interpolation polynomiale

Source: Berland, Public domain, via Wikimedia Commons

FIGURE 2.1 – Différentes méthodes d'interpolation

### 2.2 Interpolation de Lagrange

**Définition 2.2.1.** Soit  $n + 1$  points distincts  $x_0, x_1, \dots, x_n$  et  $n + 1$  valeurs correspondantes  $y_0, y_1, \dots, y_n$  que nous souhaitons interpoler. Les polynômes de Lagrange associés à ces points sont les polynômes définis par :

$$\ell_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{X - x_j}{x_i - x_j} = \frac{X - x_0}{x_i - x_0} \times \dots \times \frac{X - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \times \frac{X - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \times \dots \times \frac{X - x_n}{x_i - x_n}$$

## 2. Rappels mathématiques

---

On a en particulier deux propriétés :

1.  $\ell_i$  est de degré  $n$  pour tout  $i$  ;
2.  $\ell_i(x_j) = \delta_{i,j}$ ,  $0 \leq i, j \leq n$ , c'est-à-dire  $\ell_i(x_i) = 1$  et  $\ell_i(x_j) = 0$  pour  $j \neq i$ .

**Propriété 2.2.2.** Le polynôme défini par  $L(X) = \sum_{j=0}^n y_j \ell_j(X)$  est l'unique polynôme de degré au plus  $n$  vérifiant  $L(x_i) = y_i$  pour tout  $i$ .

En effet :

- d'une part,  $L(x_i) = \sum_{j=0}^n y_j \ell_j(x_i) = y_i$  ;
- d'autre part, étant combinaison linéaire de polynômes de degré  $n$ ,  $L$  est de degré au plus  $n$  ; si un autre polynôme  $Q$  vérifie ces propriétés, alors  $L - Q$  est de degré au plus  $n$  et il s'annule en  $n + 1$  points distincts (les  $x_k$ ) :  $L - Q$  est donc nul, ce qui prouve l'unicité.

## 2.3 Interpolation d'Hermite

### 2.3.1 Définition du problème à l'ordre 1

**Définition 2.3.1.** Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  d'une variable définie sur un segment  $[a, b]$  et à valeurs réelles, et soient  $n + 1$  points  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  distincts deux à deux dans  $[a, b]$ . L'objectif est de construire un polynôme  $P$  de degré minimal tel que :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\} \quad P(x_i) = f(x_i) \quad \text{et} \quad P'(x_i) = f'(x_i).$$

Étant donné que l'on impose  $2n + 2$  valeurs pour déterminer le polynôme  $P$ , celui-ci aura donc un degré au plus  $2n + 1$ .

### 2.3.2 Construction

Une méthode de construction de  $P$  consiste à prendre les carrés des polynômes de Lagrange associés aux points  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  :

$$q_i(X) = (L_i(X))^2 = \prod_{j=0, j \neq i}^n \left( \frac{X - x_j}{x_i - x_j} \right)^2,$$

de degré  $2n$  et vérifiant :

$$q_i(x_i) = 1, \quad q_i'(x_i) = \sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{2}{x_i - x_j}, \quad \text{et} \quad \forall j \neq i \quad q_i'(x_j) = q_i(x_j) = 0.$$

Un polynôme  $P$  de la forme

$$P(X) = \sum_{i=0}^n q_i(X) P_i(X)$$

satisfait donc les  $2n + 2$  conditions si et seulement si les polynômes  $P_i$  vérifient :

$$f(x_i) = P_i(x_i) \quad \text{et} \quad f'(x_i) = P_i'(x_i) + q_i'(x_i) P_i(x_i),$$

ce qui équivaut à :

$$P_i(x_i) = f(x_i) \quad \text{et} \quad P_i'(x_i) = f'(x_i) - q_i'(x_i) f(x_i).$$

La solution la plus simple est de choisir

$$P_i(X) = f(x_i) + (X - x_i) (f'(x_i) - q_i'(x_i) f(x_i)),$$

et  $P$  est alors de degré au plus  $2n + 1$ .

### 2.3.3 Extension aux ordres supérieurs

L'interpolation d'Hermite peut être étendue à l'interpolation des valeurs des dérivées supérieures, en cherchant, pour une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^m$  sur  $[a, b]$ , un polynôme interpolateur  $P$  vérifiant :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\} \quad \forall l \in \{0, \dots, m\} \quad P^{(l)}(x_k) = f^{(l)}(x_k).$$

Le polynôme à construire est donc de degré minimal  $(n+1)(m+1) - 1$ . Une méthode pour le définir consiste à introduire les polynômes :

$$H_{k,l}(X) = (X - x_k)^l \times Q_{k,l}(X) \times L_k^{m+1}(X),$$

où les  $L_k$  sont les polynômes de Lagrange définis précédemment et les  $Q_{k,l}$  sont des polynômes de degré  $m-l$  tels que :

$$H_{k,l}^{(l)}(x_k) = 1,$$

et pour tout  $q$  tel que  $l+1 \leq q \leq m$ ,  $H_{k,l}^{(q)}(x_k) = 0$ .

Ainsi, par construction, on a :

$$\forall i, k \in \{0, \dots, n\} \quad \forall j, l \in \{0, \dots, m\} \quad H_{k,l}^{(j)}(x_i) = \delta_{i,k} \delta_{j,l}.$$

Le polynôme  $P$  recherché s'écrit alors :

$$P = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m f^{(l)}(x_k) H_{k,l}.$$

**Propriété 2.3.2.** L'unicité du polynôme interpolateur d'Hermite se montre de façon similaire à celle du polynôme interpolateur de Lagrange : soient deux polynômes  $P$  et  $R$  vérifiant les hypothèses voulues. On a donc deux polynômes de degré au plus  $2n+1$  dont les valeurs et les dérivées coïncident en  $n+1$  points. Ainsi,  $P - R$  est divisible par  $(X - x_0)^2 (X - x_1)^2 \dots (X - x_n)^2$  qui est un polynôme de degré  $2n+2$ . Puisque  $P - R$  est de degré au plus  $2n+1$ , il est forcément nul.

## 2.4 Utilisation du logiciel Maple

Le logiciel Maple fonctionne en utilisant une combinaison de calcul symbolique et numérique pour les interpolations. Pour l'interpolation de Lagrange, ce logiciel permet de construire les polynômes d'interpolation en utilisant les formules spécifiques, où les données fournies sont utilisées pour déterminer les valeurs des points d'interpolation. Maple peut également évaluer ces polynômes d'interpolation en différents points en utilisant les valeurs données. Pour l'interpolation d'Hermite, Maple prend en compte à la fois les valeurs et les dérivées à chaque point interpolé. Il utilise les données fournies pour construire les polynômes d'interpolation d'Hermite qui satisfont à la fois les conditions de valeurs et de dérivées. L'exemple 2.4.1 montre un cas pratique simple afin de mieux comprendre le fonctionnement de ce logiciel pour l'interpolation.

**Exemple 2.4.1.** Interpolation de la fonction  $f : x \mapsto \sin(x)$

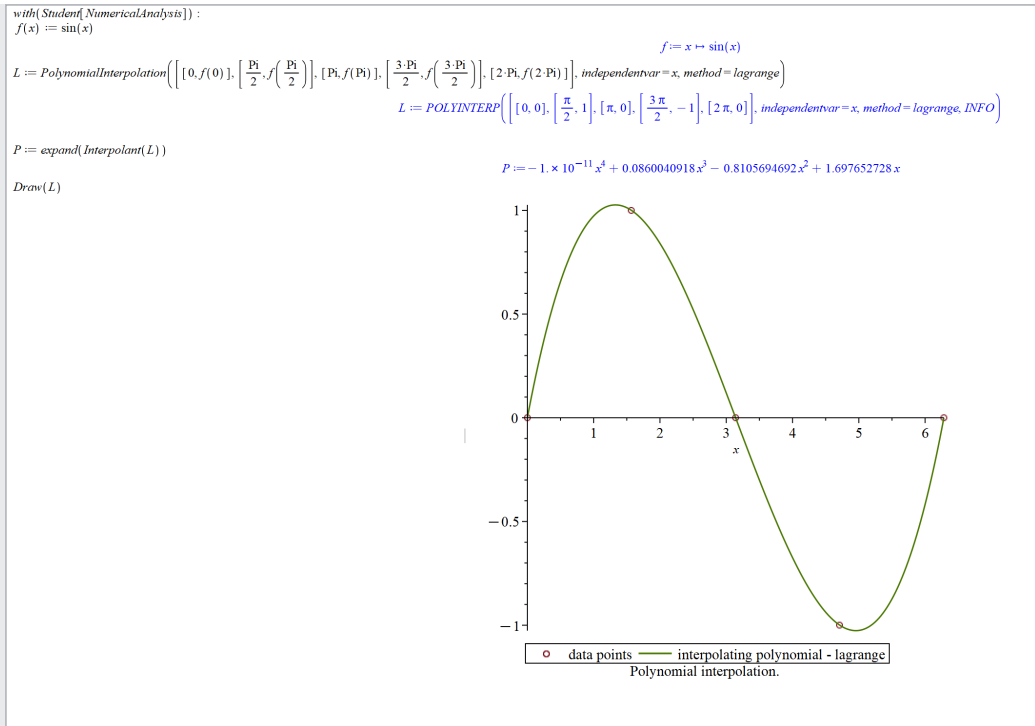


FIGURE 2.2 – Interpolation de Lagrange de la fonction  $f(x) = \sin(x)$  sur  $[0, 2\pi]$

Source: Capture d'écran du logiciel Maple

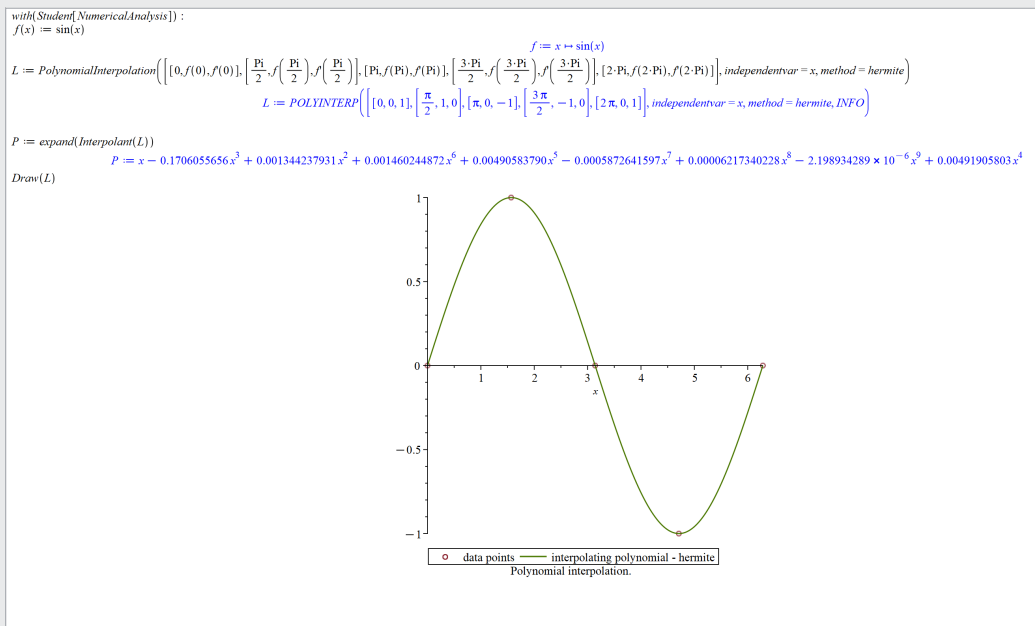


FIGURE 2.3 – Interpolation d'Hermite de la fonction  $f(x) = \sin(x)$  sur  $[0, 2\pi]$

Source: Capture d'écran du logiciel Maple

---

## Applications sur des fonctions mathématiques

---

Nous allons appliquer les interpolations de Lagrange et d'Hermitte à différentes fonctions ayant chacune leurs spécificités, à l'aide de Maple, afin de mieux comprendre leur fonctionnement et de voir les points forts et les défauts de chaque type d'interpolation.

### 3.1 Interpolations sur une fonction régulière

Soit  $f$  la fonction exponentielle définie par  $f : x \mapsto e^x$ , dont le graphe est en figure 3.1.

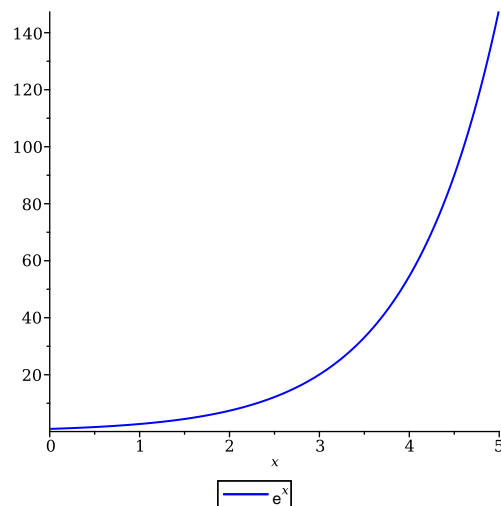


FIGURE 3.1 – Graphique de la fonction exponentielle

*Source: Visualisation générée avec Maple*

#### 3.1.1 Interpolation de Lagrange

On commence par créer une liste de points qui nous servira pour interpoler notre fonction avec la méthode de Lagrange. On commence par trois points :

$$[(0, 1), (3, e^3), (5, e^5)]$$

On obtient alors le polynôme d'interpolation de Lagrange de l'équation 3.1, représenté en figure 3.2.

$$P(x) = 11.56039309x^2 - 28.31933362x + 1.000000000 \quad (3.1)$$

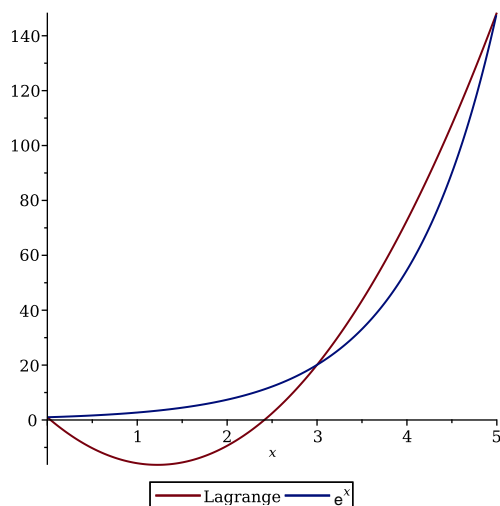


FIGURE 3.2 – Graphique de la fonction exponentielle et son interpolation de Lagrange d'ordre 3

*Source: Visualisation générée avec Maple*

On remarque alors que l'interpolation peut encore être améliorée en augmentant son degré pour mieux correspondre à la courbe. Augmentons donc le nombre de points.

On prend cette fois quatre valeurs :

$$[(0, 1), (2, e^2), (4, e^4), (5, e^5)]$$

On obtient ainsi avec le polynôme de Lagrange de l'équation 3.2, représenté en figure 3.3.

$$P(x) = 3.660196528x^3 - 16.85867443x^2 + 22.27109082x + 1 \quad (3.2)$$

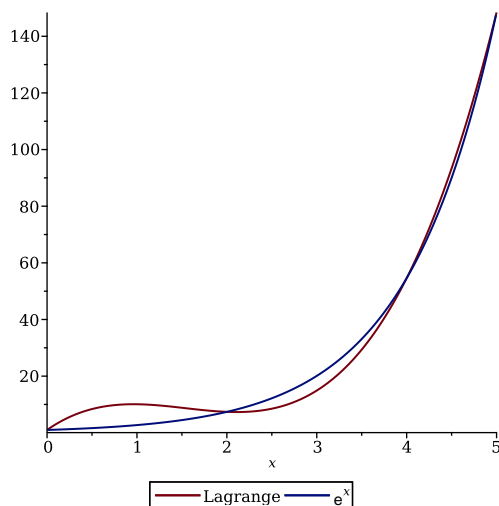


FIGURE 3.3 – Graphique de la fonction exponentielle et son interpolation de Lagrange d'ordre 4

*Source: Visualisation générée avec Maple*

On s'approche du résultat désiré, augmentons encore d'une valeur :

$$[(0, 1), (1, e^1), (2, e^2), (3, e^3), (4, e^4), (5, e^5)]$$

Sur la figure 3.4, on obtient une interpolation suffisamment proche de notre fonction d'origine, à tel point que nos deux courbes ne sont plus différentiables sur notre graphique.

On peut donc considérer le polynôme de l'équation 3.3 comme étant une bonne approximation de la fonction exponentielle sur l'intervalle  $[0, 5]$ .

$$P(x) = 0.124821886x^5 - 0.88500170x^4 + 3.03499877x^3 - 3.30606648x^2 + 2.74952932x + 1 \quad (3.3)$$

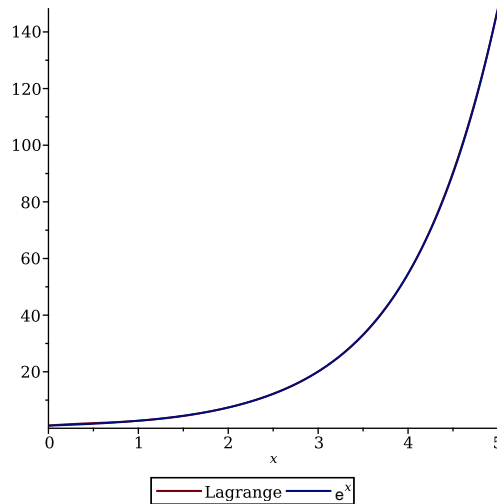


FIGURE 3.4 – Graphique de la fonction exponentielle et son interpolation de Lagrange d'ordre 5

*Source: Visualisation générée avec Maple*

### 3.1.2 Interpolation d'Hermite

Soient la fonction :  $f(x) = e^x$  sur l'intervalle  $[0, 5]$ , et les points :

$$(0, f(0)), (1, f(1)), (2, f(2)), (3, f(3)), (4, f(4)), (5, f(5))$$

Dans Maple, on définit les points dans une liste de la façon suivante :

```
liste:=[[0, f(0), f'(0)], [1, f(1), f'(1)], [2, f(2), f'(2)], [3, f(3), f'(3)], [4, f(4), f'(4)], [5, f(5), f'(5)]]
```

Nous réalisons ensuite l'interpolation d'Hermite via la commande suivante :

```
H:=PolynomialInterpolation(liste, independantvar = x, methode = hermite)
```

Nous développons ensuite le polynôme interpolateur ainsi :

```
P:=expand(Interpolant(H))
```

Et nous obtenons enfin le polynôme de l'équation 3.4.

$$\begin{aligned} P(x) = & 1 + x + 0.1681893791x^3 + 0.03873385400x^4 + 0.01151756356x^5 - 0.000771047318x^6 \\ & + 0.001154312603x^7 - 0.0002536588365x^8 + 0.00005490710170x^9 + 0.4996617325x^{10} \\ & - 5.556047502^{-6}x^{10} + 3.413435820^{-7}x^{11} \end{aligned} \quad (3.4)$$

À l'aide de la commande `plot`, nous pouvons tracer le polynôme obtenu et le comparer à la fonction de base, comme sur la figure 3.5.

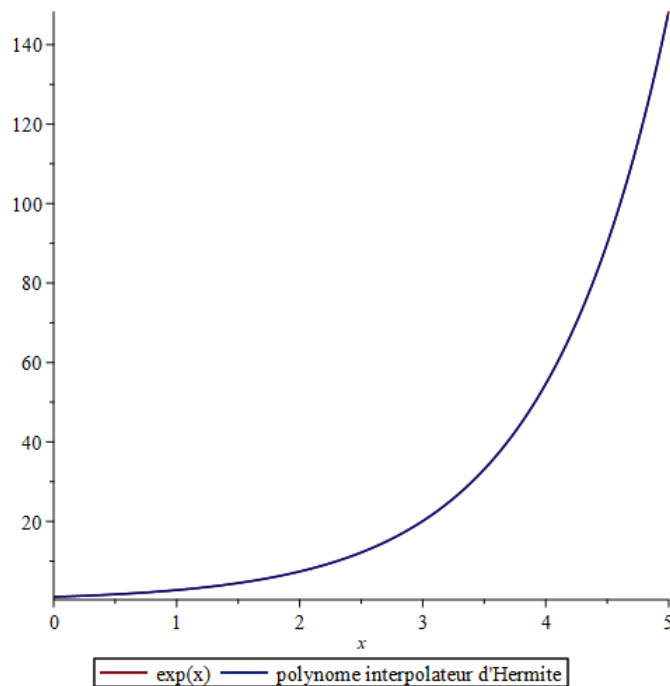


FIGURE 3.5 – Graphique de la fonction exponentielle interpolée

Source: Visualisation générée avec Maple

### 3.2 Fonction non dérivable en un point

Soit  $f$  la fonction exponentielle définie par  $f : x \mapsto \frac{|\sin(x)|}{x}$ , dont le graphe est en figure 3.6.

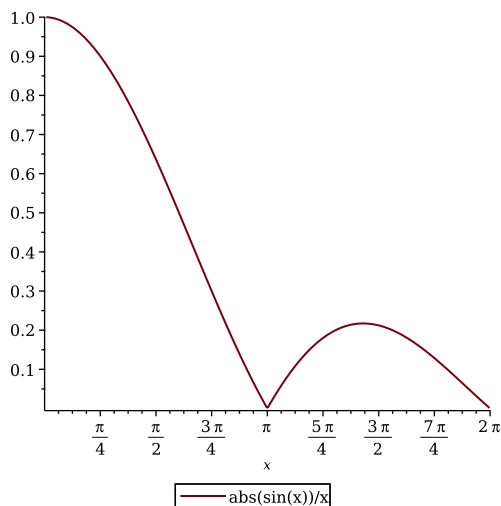


FIGURE 3.6 – Graphique de la fonction  $\text{abs}(\sin x)/x$

Source: Visualisation générée avec Maple

#### 3.2.1 Interpolation de Lagrange

On réitère alors le même procédé en commençant par trois valeurs, le point de départ et les points où la fonction s'annule :

$$[(0, 1), (\pi, 0), (2\pi, 0)]$$



On obtient alors l'équation 3.5, représentée en figure 3.7.

$$P(x) = 0.05066059180x^2 - 0.4774648291x + 1 \quad (3.5)$$

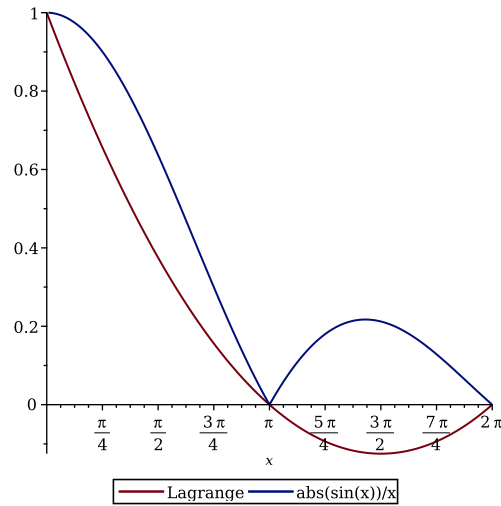


FIGURE 3.7 – Graphique de l'interpolation de Lagrange d'ordre 3 de l'absolue du sinus cardinal

*Source: Visualisation générée avec Maple*

Ce n'est pas encore assez précis, augmentons le nombre de points :

$$\left[ (0, 1), \left( \frac{\pi}{2}, \frac{2}{\pi} \right), (\pi, 0), \left( \frac{3\pi}{2}, \frac{2}{3\pi} \right), (2\pi, 0) \right]$$

Nous obtenons l'équation 3.6, représentée en figure 3.8.

$$P(x) = -0.01639344216x^4 + 0.2027556820x^3 - 0.7276891692x^2 + 0.474974294x + 0.9999999999 \quad (3.6)$$

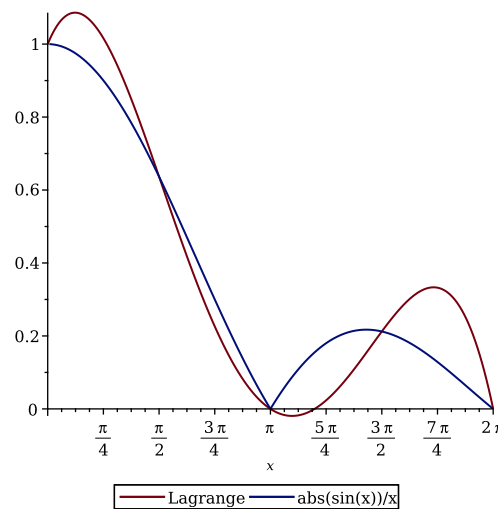


FIGURE 3.8 – Graphique de l'interpolation de Lagrange d'ordre 5 de l'absolue du sinus cardinal

*Source: Visualisation générée avec Maple*

On commence à voir que le point  $\pi$  peut poser problème. On va donc augmenter le nombre de points en procédant de deux manières différentes : augmenter le nombre de points autour de  $\pi$  et interpolier par parties.

#### 3.2.1.1 Augmentation du nombre de points

Nous allons augmenter le nombre de points autour de  $\pi$ , cette zone semblant particulièrement complexe à interpoler avec la méthode de Lagrange.

On considère donc désormais les points suivants :

$$\left[ (0, 1), \left( \frac{\pi}{4}, \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \right), \left( \frac{\pi}{2}, \frac{2}{\pi} \right), \left( \frac{9\pi}{10}, \frac{10 \sin\left(\frac{\pi}{10}\right)}{9\pi} \right), (\pi, 0), \right. \\ \left. \left( \frac{11\pi}{10}, \frac{10 \sin\left(\frac{\pi}{10}\right)}{11\pi} \right), \left( \frac{3\pi}{2}, \frac{2}{3\pi} \right), (2\pi, 0) \right]$$

On obtient alors le polynôme de l'équation 3.7, représenté en figure 3.9.

$$P(x) = 14.19746695x^3 - 7.359198276x^4 + 1.970993461x^5 - 0.2607867427x^6 + 0.01342236559x^7 + 1 \\ - 13.30823527x^2 + 4.457777944x \tag{3.7}$$

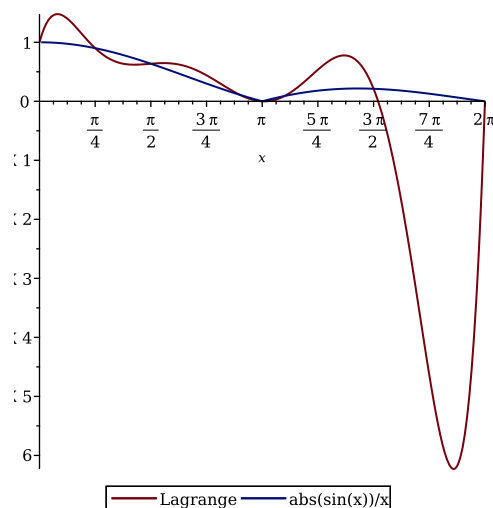


FIGURE 3.9 – Graphique de l'interpolation de Lagrange en augmentant la précision autour du point critique de l'absolue du sinus cardinal

Source: Visualisation générée avec Maple

On remarque sur la figure 3.9 qu'on a du mal à contraindre le polynôme pour qu'il suive correctement notre courbe, mais continuons d'augmenter la précision autour de  $\pi$ .

Nous obtenons un polynôme dont le tracé est en figure 3.10.

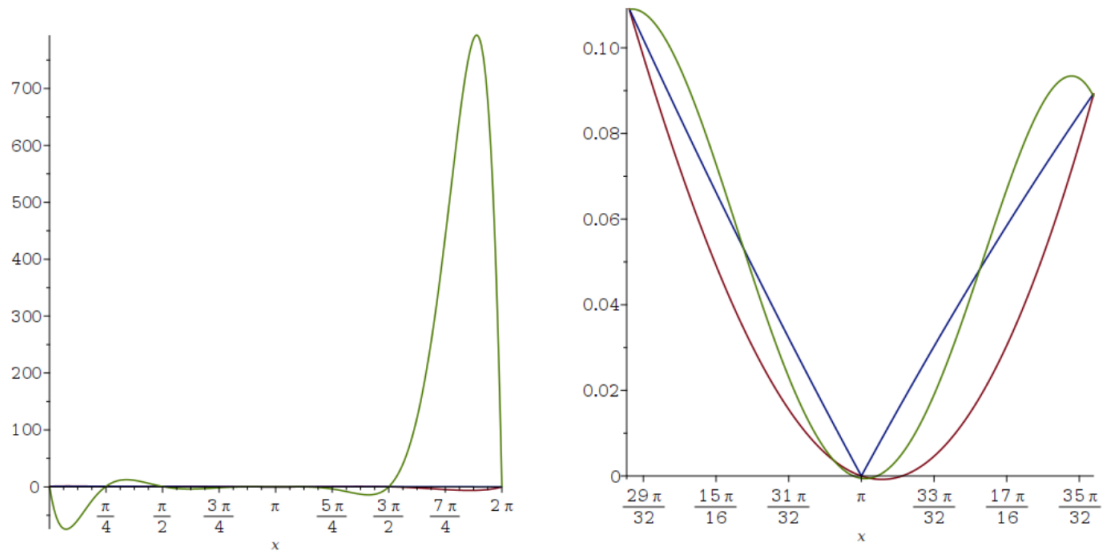


FIGURE 3.10 – Graphique de l’interpolation de Lagrange en augmentant encore la précision autour de  $\pi$

*Source: Visualisation générée avec Maple*

Nous pouvons voir sur la figure 3.10 que le phénomène de difficulté de la contrainte s’amplifie, tentons de corriger cela.

En ajoutant des contraintes, on obtient le polynôme représenté en figure 3.11.

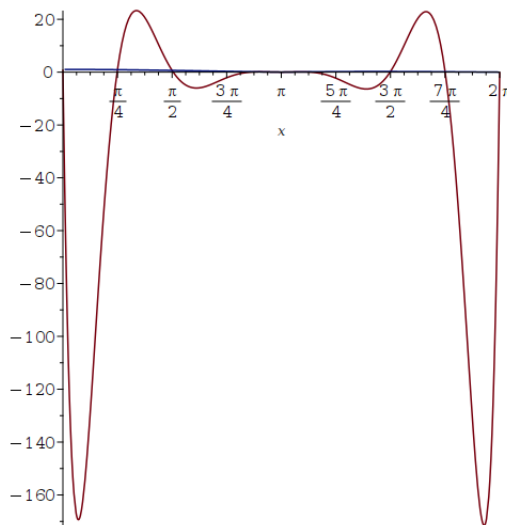


FIGURE 3.11 – Graphique de l’interpolation de Lagrange avec correction

*Source: Visualisation générée avec Maple*

Cette méthode n’étant pas concluante, nous passons à l’autre méthode.

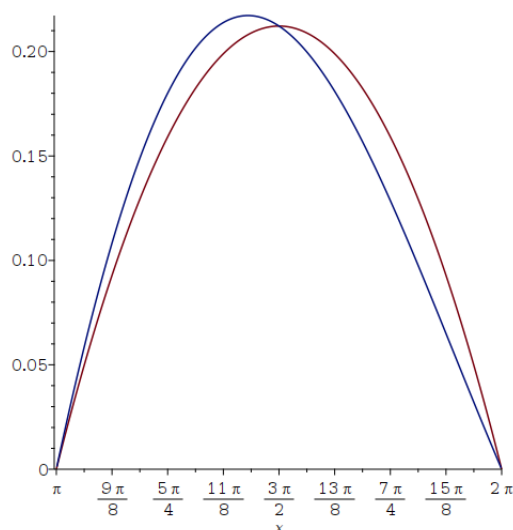
### 3.2.1.2 Interpolation par parties

Nous allons tenter d’interpoler notre fonction par parties. S’il est difficile de faire tendre un polynôme vers notre fonction, il est possible que cela soit plus aisé en concaténant plusieurs polynômes.

Nous obtenons les polynômes de l’équation 3.8 et de l’équation 3.9, représentés indépendamment en figure 3.12 et concaténés en figure 3.13.

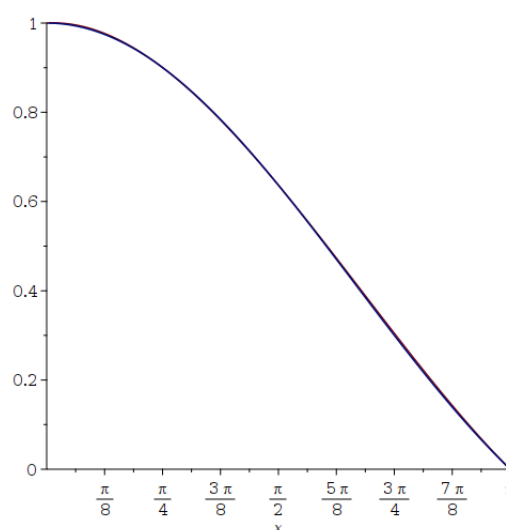
$$P_1(x) = 0.0329233894x^3 - 0.210517726x^2 + 0.018110225x + 1.000000000 \tag{3.8}$$

$$P_2(x) = -0.08600409176x^2 + 0.8105694687x - 1.697652726 \quad (3.9)$$



(a) Partie 1 de l'interpolation

Source: Visualisation générée avec Maple



(b) Partie 2 de l'interpolation

Source: Visualisation générée avec Maple

FIGURE 3.12 – Interpolation de Lagrange par parties

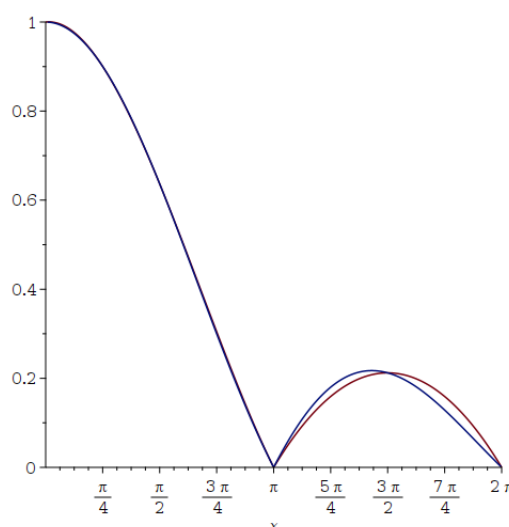


FIGURE 3.13 – Interpolation de Lagrange par parties obtenue à partir des parties 1 et 2

Source: Visualisation générée avec Maple

Cette solution est beaucoup plus concluante et nous pouvons considérer  $P_1(x)$  et  $P_2(x)$  comme de bonnes interpolations de notre fonction.

### 3.2.2 Interpolation d'Hermite

De la même manière, nous allons maintenant interpoler la fonction  $f(x) = \frac{|\sin(x)|}{x}$  sur l'intervalle  $]0, 2\pi[$  à l'aide de la méthode d'Hermite.

$f(x)$  n'étant pas dérivable en  $n\pi (n \in \mathbb{Z})$ , nous allons devoir l'interpoler par partie (une première fois sur  $]0, \pi[$  et une deuxième fois sur  $]\pi, 2\pi[$ ).

Nous calculons avec Maple les 2 polynômes interpolateurs, et obtenons les polynômes de l'équation 3.10 et de l'équation 3.11.

$$\begin{aligned}
 P_1(x) = & 1 + x + 0.1681893791x^3 + 0.03873385400x^4 + 0.01151756356x^5 - 0.000771047318x^6 \\
 & + 0.001154312603x^7 - 0.0002536588365x^8 + 0.00005490710170x^9 + 0.4996617325x^{10} \\
 & - 5.556047502^{-6}x^{10} + 3.413435820^{-7}x^{11}
 \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}
 P_2(x) = & 1.000000002 - 3.3660332^{-6}x - 0.1649614121x^2 - 0.00372942212x^3 \\
 & + 0.01145298562x^4 - 0.001215199515x^5
 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Nous pouvons maintenant les comparer à la fonction de base en les traçant, comme sur la figure 3.14.

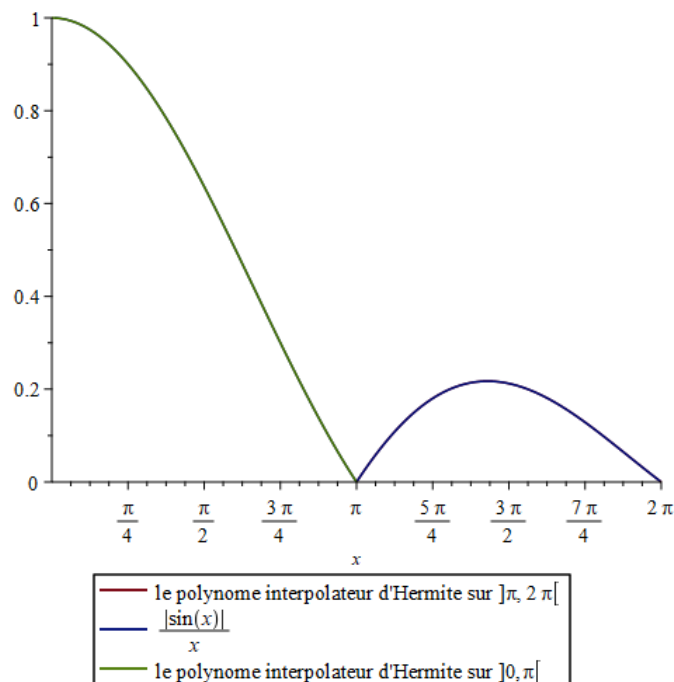


FIGURE 3.14 – Graphique de la fonction  $f(x)$  interpolée

*Source: Visualisation générée avec Maple*

### 3.3 Fonction irrégulière

Soit  $f$  la fonction définie par  $f : x \mapsto \cos(x^2) + \sin(x)$ , dont le graphe est en figure 3.15.

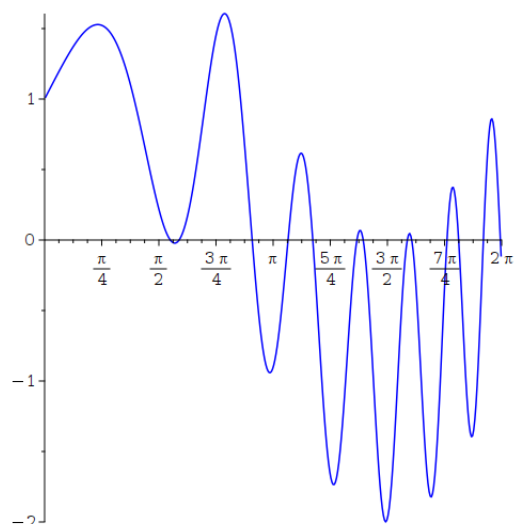


FIGURE 3.15 – Graphique de la fonction  $f$

*Source: Visualisation générée avec Maple*

### 3.3.1 Interpolation de Lagrange

Réalisons une première interpolation à l'ordre 3. Nous obtenons le polynôme de l'équation 3.12, représenté en figure 3.16.

$$P(x) = -2.035750801x^3 + 9.817495731x^2 - 11.58118071x + 1 \quad (3.12)$$

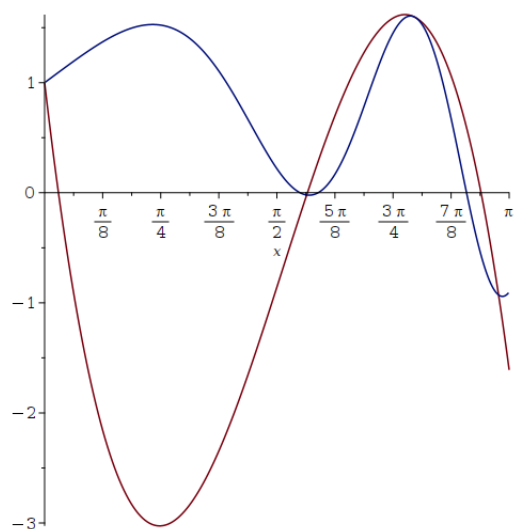
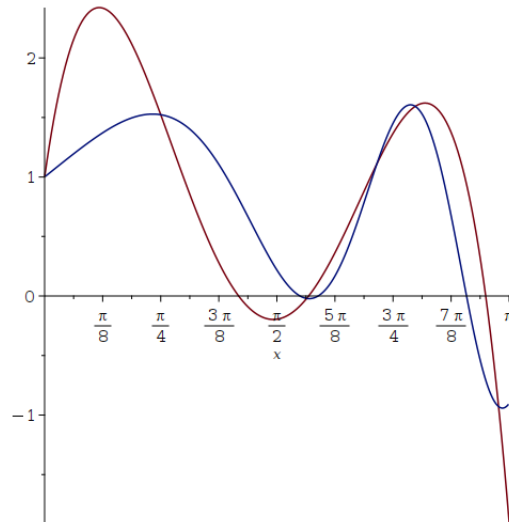


FIGURE 3.16 – Interpolation de Lagrange de  $f$

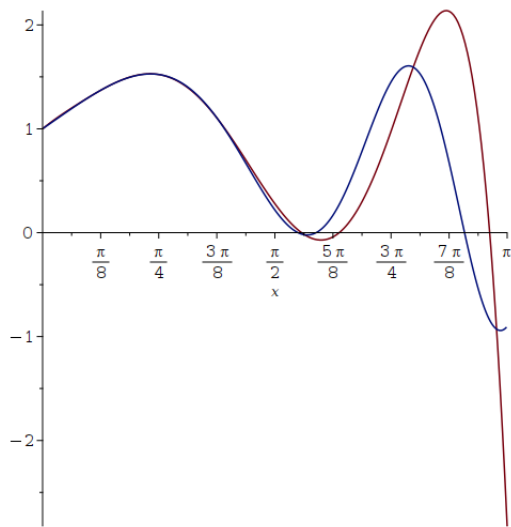
*Source: Visualisation générée avec Maple*

N'ayant aucune information sur la direction à prendre à l'aide de la dérivée de la fonction, le polynôme d'interpolation part avec une croissance négative sur la figure 3.16. Tentons de corriger cela. Nous obtenons le résultat de la figure 3.17, obtenu à partir du polynôme de l'équation 3.13.

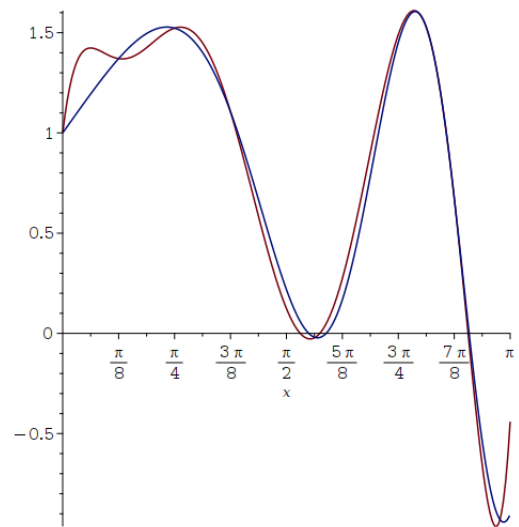
$$P(x) = 0.9999999999 - 1.42567809x^2 + 3.76519634x^3 - 5.40066209x^4 + 2.65912679x^5 - 0.413895259x^6 + 1.191184354x \quad (3.13)$$

FIGURE 3.17 – Interpolation de Lagrange de  $f$ *Source: Visualisation générée avec Maple*

Le fait d'avoir corrigé le polynôme d'un côté nous a baissé sa précision de l'autre côté de l'intervalle.



(a) Première interpolation

*Source: Visualisation générée avec Maple*

(b) Deuxième interpolation, encore affinée

*Source: Visualisation générée avec Maple*FIGURE 3.18 – Interpolation de Lagrange de  $f$ 

Après deux autres corrections successives, montrées sur la figure 3.18, on arrive enfin à une bonne approximation de notre fonction, les corrections étant de plus en plus minimes. On obtient donc enfin le résultat de la figure 3.19, dont le polynôme est l'équation 3.14.

$$\begin{aligned}
 P(x) = & 1 + 3.4554440x^2 - 14.1212031x^3 + 26.3502242x^4 - 27.2010255x^5 \\
 & + 14.6725645x^6 - 3.84304559x^7 + 0.385610764x^8 + 0.69263985x
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

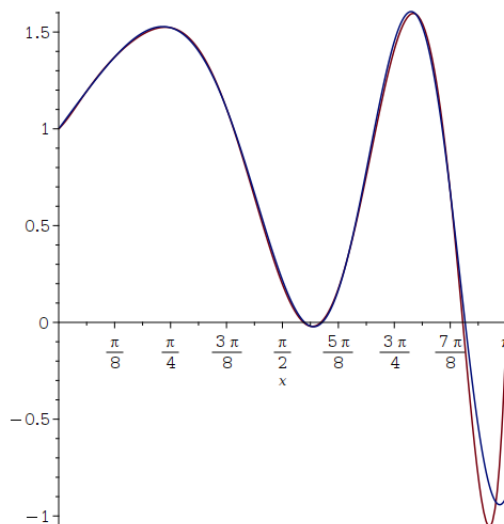


FIGURE 3.19 – Interpolation de Lagrange à précision maximisée de  $f$

*Source: Visualisation générée avec Maple*

### 3.3.2 Interpolation d'Hermite

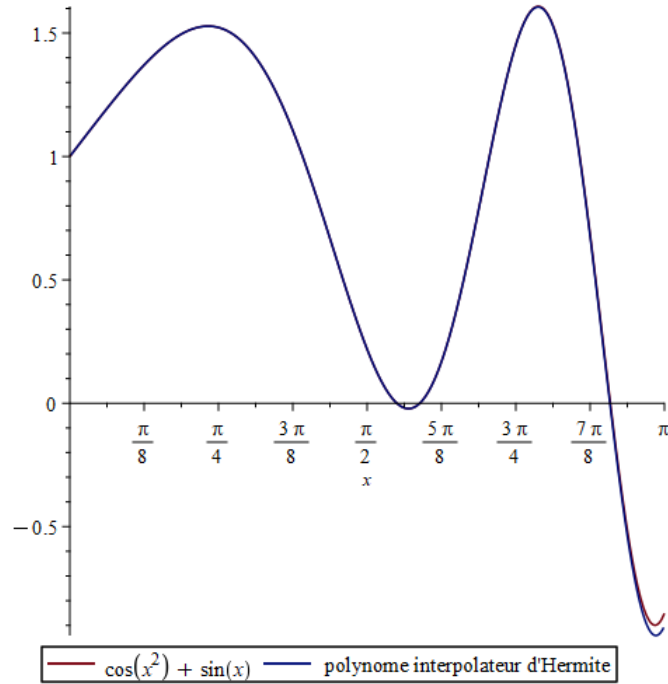
Nous allons à présent interpoler la fonction  $f(x) = \cos(x^2) + \sin(x)$  à l'aide de la méthode d'Hermite.

Grâce à Maple, nous trouvons le polynôme interpolateur de l'équation 3.15.

$$\begin{aligned}
 P_1(x) = & 1 + x + 0.001613938852x^2 - 0.03371767574x^{18} + 0.1638955144 * x^{17} \\
 & - 0.0003847363921x^{20} + 0.004646807645x^{19} + 0.00001444235542x^{21} \\
 & + 11.0935383x^{10} - 13.51254438x^9 + 0.36553649x^{12} - 5.5894385 * x^{11} \\
 & - 2.29543281x^{14} + 2.21235485x^{13} - 0.560803375x^{16} + 1.367610832x^{15} \\
 & - 0.2768011134x^4 - 0.1950101458x^3 + 3.27792601x^6 - 1.038982509x^5 \\
 & + 11.63830121x^8 - 7.24054976x^7
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Nous pouvons maintenant le comparer à la fonction de base, comme sur la figure 3.20.

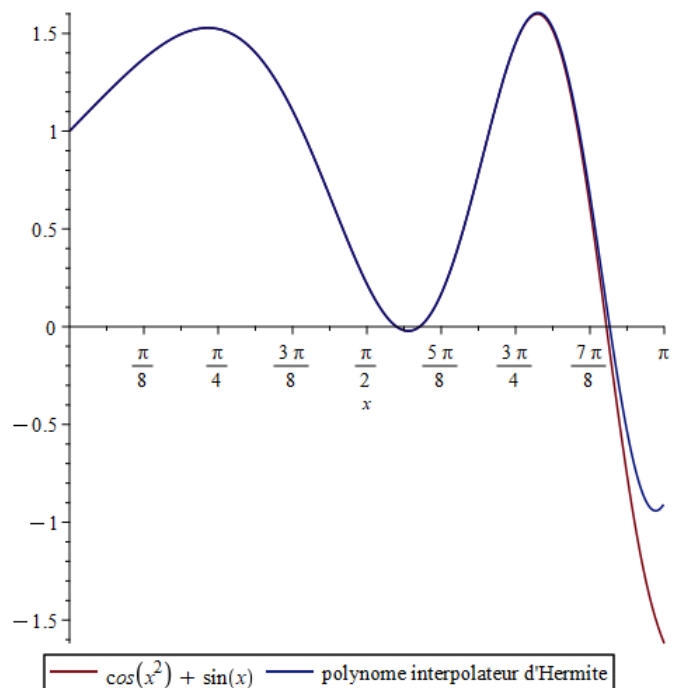


FIGURE 3.20 – Graphique de la fonction  $f(x)$  interpolée

*Source: Visualisation générée avec Maple*

On peut voir que l'interpolation obtenue correspond à la fonction de base. Mais, si nous élargissons, même légèrement l'intervalle, l'interpolation devient moins fiable. Par exemple, avec l'intervalle élargi à  $\left]0, \frac{5}{4}\pi\right[$ , on obtient le polynôme de l'équation 3.16, représenté en figure 3.21.

$$\begin{aligned}
 P1(x) = & 1 + x - 0.02054258644x^2 + 6.812625198^{-7}x^{23} - 0.9312764405x^{18} \\
 & + 4.660043396x^{17} - 0.01494562400x^{20} + 0.1395229006x^{19} - 0.00004272846395x^{22} \\
 & + 0.001058356081x^{21} - 559.9631276x^{10} + 465.3164765x^9 - 419.3204224x^{12} \\
 & + 539.5754414x^{11} - 134.1513129x^{14} + 263.6884351x^{13} - 18.02518567x^{16} \\
 & + 54.99979154x^{15} - 3.795337772x^4 + 0.2189158412x^3 - 60.61969457x^6 \\
 & + 17.10922093x^5 - 305.9662344x^8 + 156.4809895x^7
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

FIGURE 3.21 – Graphique de la fonction  $f(x)$  interpolée

*Source: Visualisation générée avec Maple*

On observe que l'interpolation est déjà moins fiable, et si on prend un intervalle de plus en plus large, l'interpolation sera de moins en moins fiable.

### 3.3.3 Conclusion

#### 3.3.3.1 Interpolation de Lagrange

En somme, l'interpolation de Lagrange est un très bon outil d'approximation polynômial de fonctions et de systèmes tant que ceux-ci sont suffisamment réguliers et dérivables partout.

Si la fonction n'est pas dérivable en un point, il faut alors se résoudre à faire une interpolation par parties afin d'éviter que la fonction ne s'« emballe ». On se retrouve alors avec deux polynômes plus simples à étudier au lieu d'un seul avec un degré plus élevé.

Dans le cas d'une fonction assez irrégulière, beaucoup de points sont nécessaires pour arriver à une interpolation satisfaisante. Par conséquent, celle-ci est un polynôme d'un degré très élevé et difficile à étudier. Cela reste cependant faisable avec des méthodes telles que celle de Newton, pour par exemple trouver les racines du polynôme de Lagrange du phénomène que nous cherchons à étudier.

#### 3.3.3.2 Interpolation d'Hermite

L'interpolation d'Hermite semble déjà assez fiable avec peu de points. Les composantes – notamment sinusoïdales – sont bien retranscrites, même avec un maillage assez large.

---

## Application sur des mesures physiques

---

Pour cette dernière partie, nous allons tenter d'appliquer les interpolations de Lagrange et d'Hermite sur différentes mesures physiques, réalisées par nos soins ou non.

### 4.1 Vitesse lors d'un sprint en vélo

Les premières mesures physiques que nous avons choisi d'analyser est l'évolution de la vitesse au cours d'un sprint en vélo.

Pour ce faire, nous avons enregistré, à l'aide de l'application *Strava*, deux traces GPS (une d'ouest en est, et une d'est en ouest) sur un segment en particulier. Nous avons choisi une portion de la RD960 entre le village d'Orgeux et le hameau d'Arcelot, montrée sur la figure 4.1, car il s'agit d'un tracé rectiligne et présentant une pente quasi-nulle.

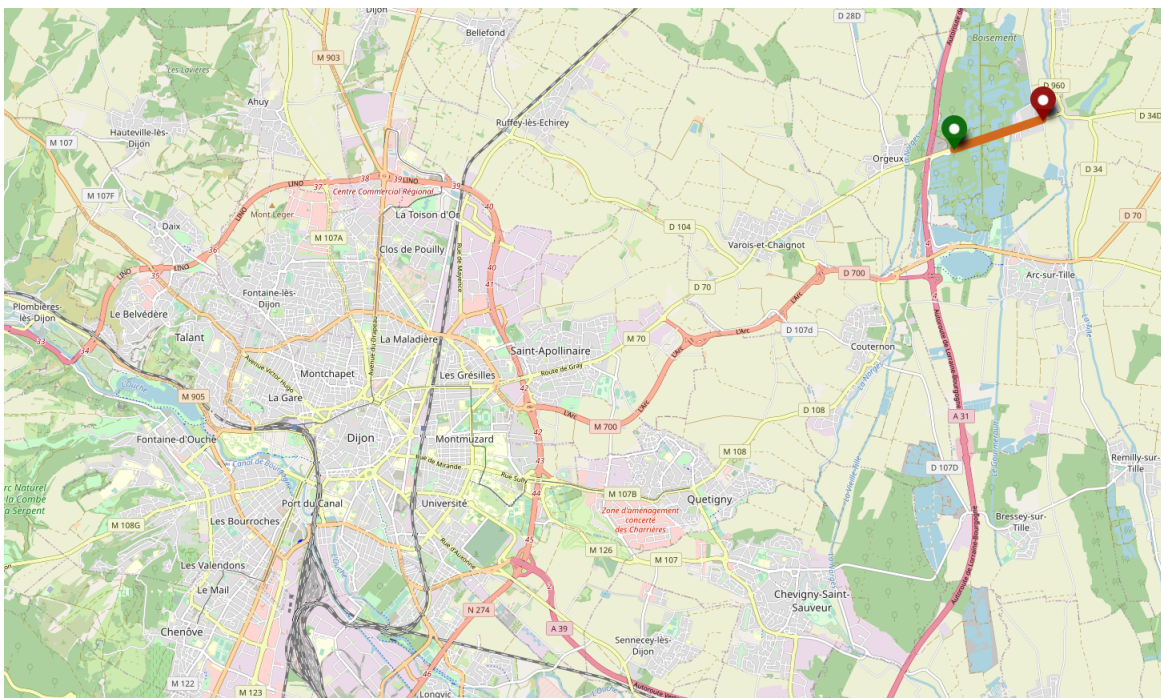
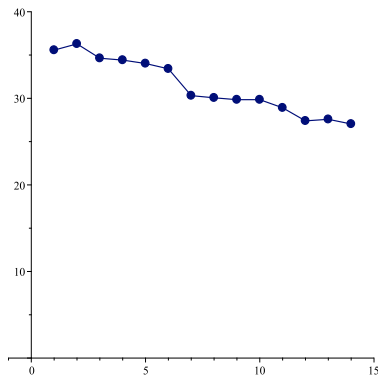


FIGURE 4.1 – Situation géographique du lieu de mesure par rapport à Dijon

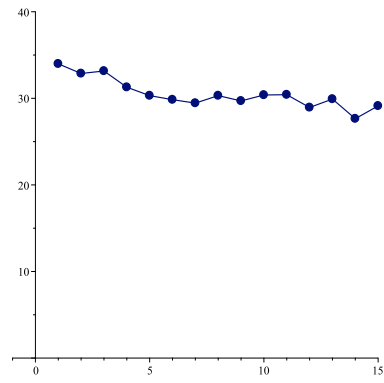
*Source: Contributeurs d'OpenStreetMap*

Le nombre de points sur les traces GPS étant assez élevé, avec environ 150 points par sprint, nous avons réduit ce nombre de points par 10, en faisant des moyennes. On obtient alors les graphes de vitesse de la figure 4.2.



(a) Sprint ouest → est

*Source: Données enregistrées par nos soins / Visualisation générée avec Maple*



(b) Sprint est → ouest

*Source: Données enregistrées par nos soins / Visualisation générée avec Maple*

FIGURE 4.2 – Graphiques montrant l'évolution de la vitesse au cours des sprints

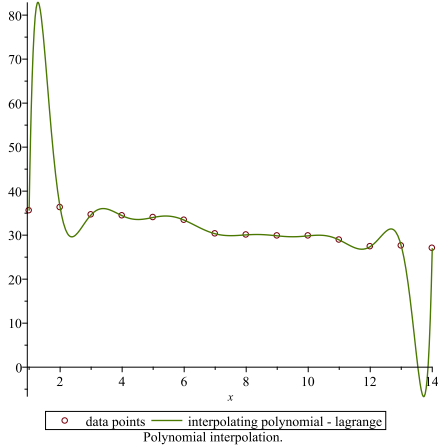
### 4.1.1 Interpolation de Lagrange

Interpolons ces données avec la méthode de Lagrange sur Maple. On obtient des polynômes du treizième ou du quatorzième degré en fonction du sprint étudié, le nombre de points étant légèrement différent.

Le tracé des polynômes obtenus, dont les formules sont en équation 4.1 et équation 4.2, superposés aux points de référence étudiées, en figure 4.3, montre une interpolation plutôt fidèle sur les points « centraux ».

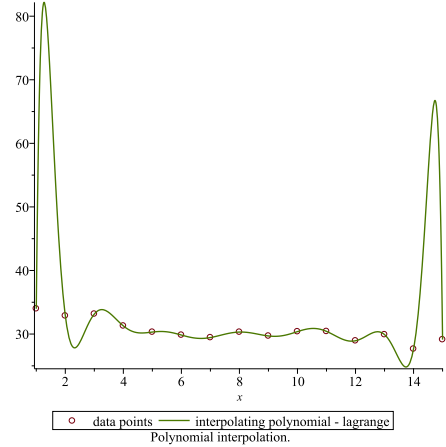
$$\begin{aligned}
 P_{\text{ouest} \rightarrow \text{est}}(x) = & 15086.38132x - 4841.856010 + 3.668206807 \times 10^{-7}x^{13} + 14333.20081x^3 \\
 & - 6701.032086x^4 + 2129.751956x^5 - 476.6726374x^6 + 76.49254137x^7 \\
 & - 8.841521671x^8 + 0.7298635690x^9 - 0.04196404120x^{10} + 0.001595946521x^{11} \\
 & - 0.00003607443486x^{12} - 19562.54570x^2
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
 P_{\text{est} \rightarrow \text{ouest}}(x) = & 19148.56876x - 3.625466825 \times 10^{-8}x^{14} + 4.074932640 \times 10^{-6}x^{13} \\
 & - 0.0002074810990x^{12} + 0.006331121985x^{11} + 20053.33899x^3 - 9981.278725x^4 \\
 & + 3413.862436x^5 - 832.8590267x^6 + 148.0101697x^7 - 19.33809467x^8 \\
 & + 1.855316545x^9 - 0.1290721804x^{10} - 5945.472020 - 25952.58129x^2
 \end{aligned} \tag{4.2}$$



(a) Sprint ouest → est

Source: Données enregistrées par nos soins / Visualisation générée avec Maple



(b) Sprint est → ouest

Source: Données enregistrées par nos soins / Visualisation générée avec Maple

FIGURE 4.3 – Sprints interpolés par la méthode de Lagrange

### 4.1.2 Interpolation d'Hermite

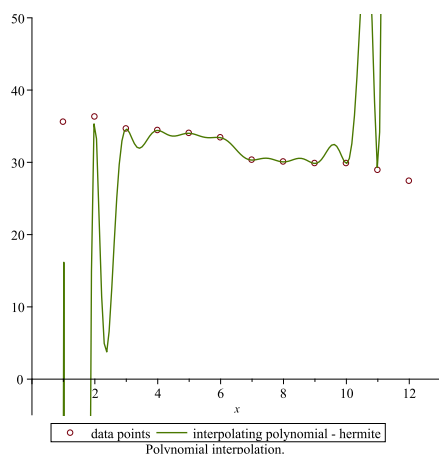
L'interpolation d'Hermite est un peu plus délicate à mettre en place : en effet, on utilise usuellement les dérivées en un point des fonctions pour déterminer. Pour pallier ce manque, on peut effectuer un calcul de pente entre le point suivant et le point étudié. On obtient alors, de la même manière qu'avec la dérivée en un point, le « vecteur de direction » de la fonction.

Une fois cette manipulation faite, on obtient l'équation 4.3 et l'équation 4.4, tracées sur la figure 4.4. On note que cette fois-ci, nous obtenons des polynômes des vingt-troisième et vingt-cinquième degrés. Sur ce jeu de données, l'interpolation d'Hermite semble peu adaptée : en effet, on obtient des valeurs aberrantes entre les points interpolés. De plus, le polynôme obtenu ne semble même pas passer par certains points.

$$\begin{aligned}
 P_{\text{ouest} \rightarrow \text{est}}(x) = & 9.337499953 \times 10^7 x - 1.543275746 \times 10^7 + 4.357500760 \times 10^{-10} x^{23} \\
 & - 6.513538275 \times 10^{-8} x^{22} + 4.594292453 \times 10^{-6} x^{21} - 0.0002033490712 x^{20} \\
 & + 0.006335736697 x^{19} - 0.1477576413 x^{18} + 2.677502015 x^{17} - 38.62884467 x^{16} \\
 & + 451.0282355 x^{15} - 4309.001067 x^{14} + 33922.75438 x^{13} + 1.191854291 \times 10^6 x^{11} \\
 & - 220930.6094 x^{12} + 1.957068332 \times 10^7 x^9 - 5.319525616 \times 10^6 x^{10} \\
 & + 4.370671222 \times 10^8 x^3 - 5.079731170 \times 10^8 x^4 + 4.330401813 \times 10^8 x^5 \\
 & - 2.819893752 \times 10^8 x^6 + 1.441549857 \times 10^8 x^7 - 5.897203506 \times 10^7 x^8 \\
 & - 2.585220787 \times 10^8 x^2
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

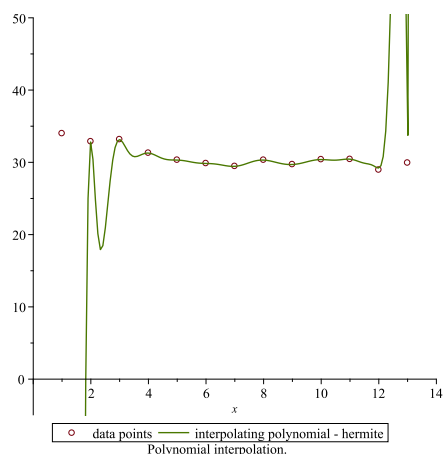
$$\begin{aligned}
 P_{\text{est} \rightarrow \text{ouest}}(x) = & 4.736652530 \times 10^7 x - 7.744024831 \times 10^6 + 6.932884472 \times 10^{-13} x^{25} \\
 & - 1.250119354 \times 10^{-10} x^{24} + 1.069012755 \times 10^{-8} x^{23} - 5.767271760 \times 10^{-7} x^{22} \\
 & + 0.00002202965884 x^{21} - 46.17515654 x^{16} - 0.2576016927 x^{18} + 3.795368058 x^{17} \\
 & - 0.0006338285437 x^{20} + 0.01426702902 x^{19} - 3963.802620 x^{14} + 467.6677728 x^{15} \\
 & - 2.706086038 \times 10^8 x^4 + 2.283418021 \times 10^8 x^3 - 1.581015036 \times 10^8 x^6 \\
 & + 2.361372864 \times 10^8 x^5 - 3.552314909 \times 10^7 x^8 + 8.352728336 \times 10^7 x^7 \\
 & - 3.538758730 \times 10^6 x^{10} + 1.233979579 \times 10^7 x^9 - 168447.6714 x^{12} \\
 & + 844261.6207 x^{11} + 28195.15062 x^{13} - 1.328970892 \times 10^8 x^2
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

## 4. Application sur des mesures physiques



(a) Sprint ouest  $\rightarrow$  est (axe  $y$  tronqué)

Source: Données enregistrées par nos soins / Visualisation générée avec Maple



(b) Sprint est  $\rightarrow$  ouest (axe  $y$  tronqué)

Source: Données enregistrées par nos soins / Visualisation générée avec Maple

FIGURE 4.4 – Sprints interpolés par la méthode d’Hermite

## 4.2 Copie d’un gigaoctet de données

Le deuxième jeu de données que nous avons choisi d’interpoler montre la vitesse de copie de 1 GB de données, en fonction du nombre de fichiers dans lesquels ces données sont dispersées. Nous avons donc réalisé un script Bash, en figure 4.5 qui effectue ces tests, puis enregistre des données importables dans Maple. Les mesures ont été effectuées via la commande `cp` dans un environnement *Windows Subsystem for Linux*, sur un disque SSD Western Digital® Blue™ SN570.

```
#!/bin/bash

# GNU Time is required to run this program.

mkdir -p time_results/

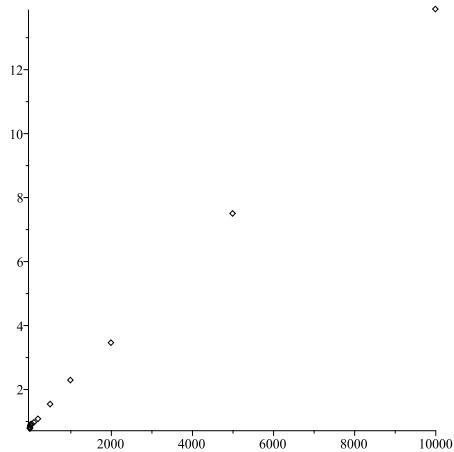
for i in 1 2 5 10 20 50 100 200 500 1000 2000 5000 10000
do
  mkdir -p data_${i}/
  for k in $(seq $i)
  do
    dd if=/dev/zero of=data_${i}/${k}.bin bs=1024 count=0 seek=$((1024*1024)/$i) &> /dev/null
  done
  /usr/bin/time -p -o time_results/${i}.txt cp -r data_${i} data_${i}_copy &> /dev/null
  rm -rf data_${i}
  rm -rf data_${i}_copy
  for i in $(ls time_results | grep -E "\.txt")
  do
    echo $i | cut -f1 -d'.' | tr -d '$\n'
    echo -n " "
    grep real time_results/$i | cut -f2 -d' '
  done > time_results.txt
done
```

FIGURE 4.5 – Script Bash permettant de générer, puis effectuer la copie d’un gigaoctet de données divisés en différents nombres de fichiers

Source: Script réalisé par nos soins

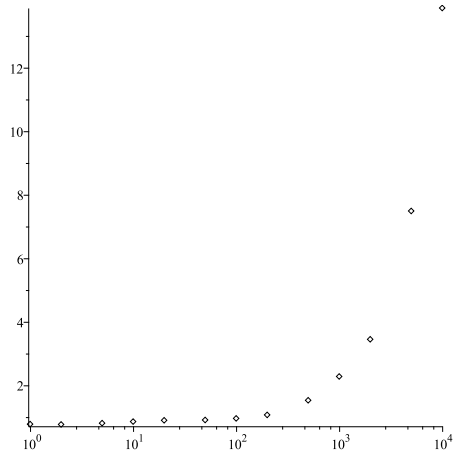
À l’issue de ces mesures, nous obtenons le nuage de points de la figure 4.6, dont on peut passer l’axe  $x$  en échelle logarithmique compte tenu de l’ordre de grandeur des valeurs considérées. Pour les interpolations, nous appliquerons donc la fonction  $\log_1 0$  aux coordonnées  $x$  de chaque point. Cela devrait permettre d’obtenir des interpolations de meilleure qualité, mais on a une échelle  $x$  qui va désormais de 0

à 4 et non plus de 1 à 10 000. On peut remarquer que, avec les points présentés ainsi, on a l'allure d'une fonction exponentielle.



(a) Visualisation avec  $x$  et  $y$  en échelles linéaires

*Source: Données enregistrées par nos soins / Visualisation générée avec Maple*



(b) Visualisation avec  $x$  en échelle logarithmique et  $y$  en échelle linéaire

*Source: Données enregistrées par nos soins / Visualisation générée avec Maple*

FIGURE 4.6 – Nuage de points montrant la vitesse de copie d'un gigaoctet de données en fonction du nombre de fichiers

### 4.2.1 Interpolation de Lagrange

Interpolons ces données avec la méthode de Lagrange. On obtient alors le polynôme interpolé de l'équation 4.5, tracé en figure 4.7, La fonction interpolée semble bien passer par les points donnés, et avoir une croissance raisonnable.

$$\begin{aligned}
 P(x) = & 5.11309850x + 44.4320485x^2 - 155.940611x^3 + 298.425086x^4 - 349.717714x^5 + 266.000191x^6 \\
 & - 134.930055x^7 + 45.8410638x^8 - 10.2387718x^9 + 1.42996265x^{10} - 0.111779192x^{11} \\
 & + 0.00365844375x^{12} + 0.7799999995
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

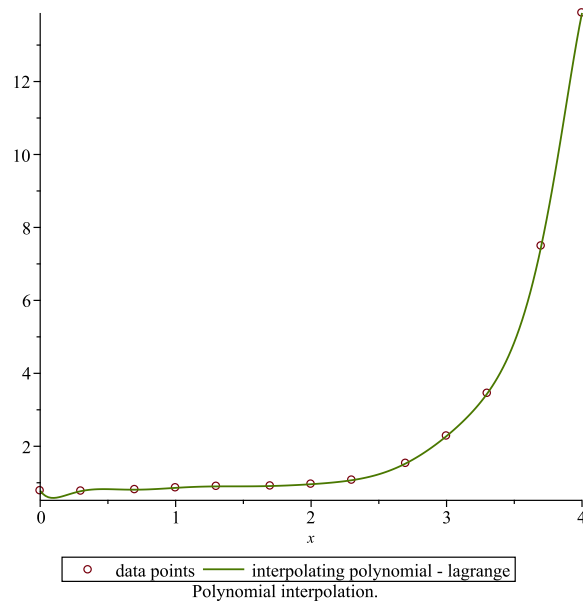


FIGURE 4.7 – Temps de copie interpolés par la méthode de Lagrange

*Source: Données enregistrées par nos soins / Visualisation générée avec Maple*

## 4.2.2 Interpolation d'Hermite

Si on interpole ces données avec la méthode d'Hermite, on obtient le polynôme de l'équation 4.6, représenté en figure 4.8. On voit bien que, malgré l'introduction de la pente entre les points, les résultats avec cette méthode sont très peu probants, surtout lorsqu'on les compare à ceux obtenus avec la méthode de Lagrange.

$$\begin{aligned}
 P(x) = & 0.80883816x - 3.249562653 \times 10^8 x^{15} + 1.786949270 \times 10^6 x^2 \\
 & + 151.2377224x^{22} - 475996.4115x^{19} - 2.839285433 \times 10^7 x^3 + 2.008918671 \times 10^8 x^4 \\
 & - 8.486560784 \times 10^8 x^5 + 2.422461801 \times 10^9 x^6 - 5.004903281 \times 10^9 x^7 \\
 & + 7.814079537 \times 10^9 x^8 - 9.488644187 \times 10^9 x^9 + 9.140097242 \times 10^9 x^{10} \\
 & - 7.079204535 \times 10^9 x^{11} + 4.447754451 \times 10^9 x^{12} + 8.985781920 \times 10^7 x^{16} \\
 & - 2.278249403 \times 10^9 x^{13} + 9.529591480 \times 10^8 x^{14} + 0.7800001 - 3412.352579x^{21} \\
 & + 48136.31435x^{20} - 3.152670068x^{23} + 3.506269850 \times 10^6 x^{18} - 1.995735194 \times 10^7 x^{17}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$



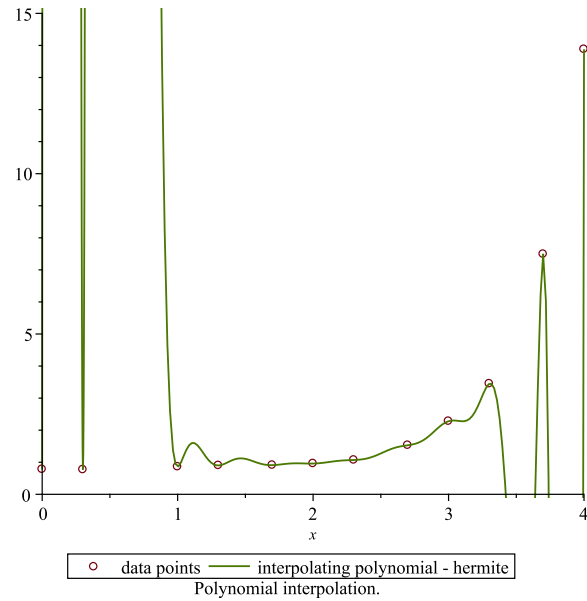


FIGURE 4.8 – Temps de copie interpolés par la méthode d'Hermite (axe  $y$  tronqué)

Source: Données enregistrées par nos soins / Visualisation générée avec Maple

### 4.3 Température au cours d'une nuit et d'une matinée

Le dernier jeu de données que nous avons choisi d'interpoler décrit l'évolution de la température au cours d'une nuit, et d'une matinée. Ces données sont issues du système *Meteorological Aerodrome Report* (METAR), dont les données sont accessibles au public. Les données étudiées ici proviennent donc de la station météorologique de l'aéroport Dijon-Bourgogne, à Ouges, dont l'emplacement est en figure 4.9, et ont été enregistrées entre le 2 juin 2023 à 18h et le 3 juin 2023 à 14h.

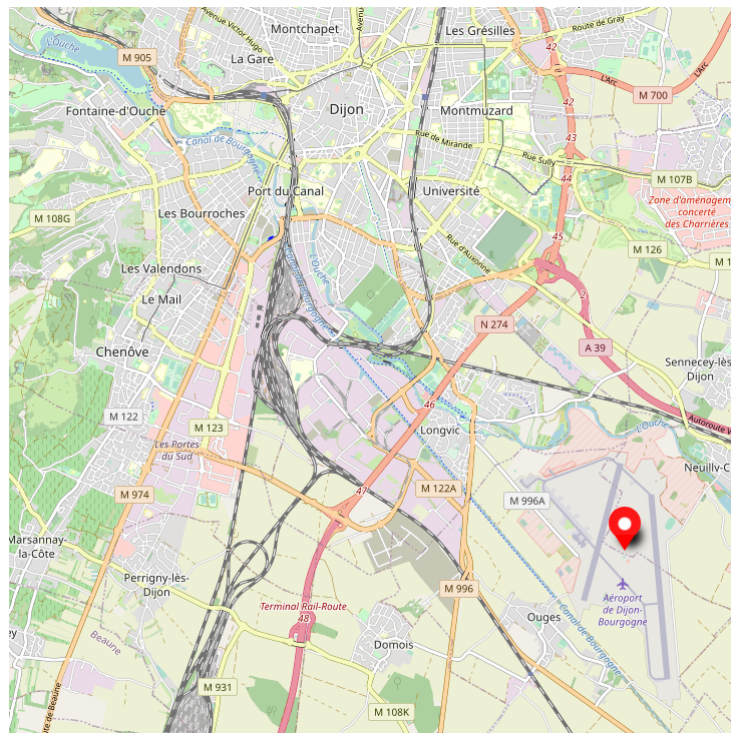


FIGURE 4.9 – Situation géographique du lieu de mesure par rapport à Dijon

Source: Contributeurs d'OpenStreetMap

## 4. Application sur des mesures physiques

Les mesures recueillies sont consignées dans le nuage de points de la figure 4.10. L'abscisse 0 correspond à minuit, les abscisses négatives au 2 juin, et les abscisses positives au 3 juin (graduation en heures).

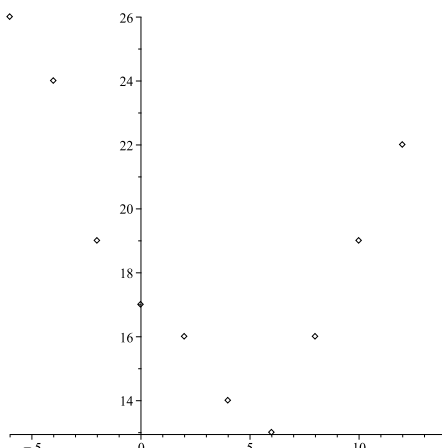


FIGURE 4.10 – Visualisation des données météorologiques recueillies

Source: Système METAR / Visualisation générée avec Maple

### 4.3.1 Interpolation de Lagrange

En interpolant ces données avec la méthode de Lagrange, on obtient l'équation 4.7, représentée en figure 4.11 : on a des valeurs assez cohérentes sur les valeurs « centrales » seulement.

$$\begin{aligned} P(x) = & 2.610410135 \times 10^{-8}x^{10} - 0.05623002022x^3 - 0.005173025574x^4 + 0.0009123624568x^5 \\ & + 0.0003905345915x^6 - 0.00002512452431x^7 - 7.427558859 \times 10^{-6}x^8 \\ & + 8.746219538 \times 10^{-7}x^9 - 0.5382936511x + 17.0 + 0.1399255945x^2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

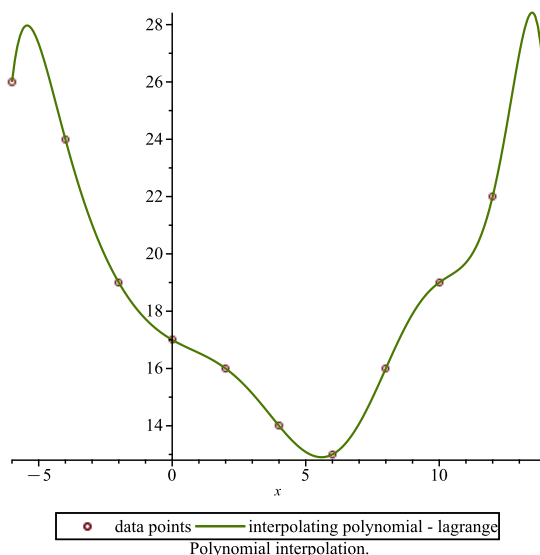


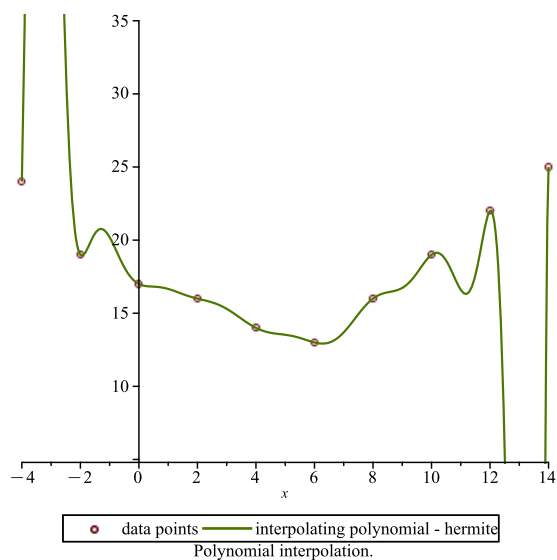
FIGURE 4.11 – Température interpolée par la méthode de Lagrange

Source: Système METAR / Visualisation générée avec Maple

### 4.3.2 Interpolation d'Hermite

En interpolant ces données avec la méthode d'Hermite, on obtient l'équation 4.8, représentée en figure 4.12 : on a des valeurs approximativement cohérentes sur les valeurs « centrales », et des valeurs complètement aberrantes sur les « côtés ».

$$\begin{aligned}
P(x) = & 16.99999 - 4.712756012 \times 10^{-13}x^{19} + 4.400827060 \times 10^{-11}x^{18} - 1.791643517 \times 10^{-9}x^{17} \\
& + 4.129342868 \times 10^{-8}x^{16} - 5.798115558 \times 10^{-7}x^{15} + 4.820238848 \times 10^{-6}x^{14} \\
& - 0.0000179300370x^{13} - 0.0000566544506x^{12} - 0.003402176021x^{10} + 0.0009349467200x^{11} \\
& - 0.5261852422x^4 - 1.527617937x^3 - 0.1670026673x^6 + 0.884223236x^5 + 0.0584607698x^8 \\
& - 0.1219872155x^7 - 0.00333690138x^9 + 2.068786988x^2 - 1.000008x
\end{aligned}
\tag{4.8}$$

FIGURE 4.12 – Température interpolée par la méthode d’Hermite (axe  $y$  tronqué)

*Source: Système METAR / Visualisation générée avec Maple*



---

## Conclusion

---

En conclusion, nous avons pu comparer les méthodes d'interpolation de Lagrange et d'Hermite sur des exemples mathématiques et physiques. Cela nous a permis de mieux comprendre l'intérêt de chacune des méthodes.

La méthode de Lagrange est assez efficace sur des fonctions relativement régulières, qui ne présentent pas de « saut » brusque. C'est également la méthode qui nous a amené le plus de satisfaction sur les applications aux mesures physiques : en effet, la plupart du temps, nous arrivons à obtenir une interpolation de qualité, au moins entre les points les plus importants.

De son côté, la méthode d'Hermite, grâce à l'introduction de dérivées, qui donnent un coefficient directeur à la courbe interpolée, est redoutablement efficace sur les fonctions mathématiques présentant des variations rapides et brusques. Sur les mesures physiques testées, celle-ci ne semblait pas très adaptée, au vu des mauvais résultats obtenus. Elle doit néanmoins avoir ces applications dans ce domaine, sur des jeux de données plus lisses et avec des variations brusques.

Ce projet nous a également permis de découvrir le logiciel de calcul formel *Maple*, qui nous a notamment permis de calculer toutes les interpolations de ce document. Nous avons ainsi mieux compris l'utilité des méthodes d'interpolation vues en cours, à l'aide d'applications pratiques.

Nous aurions pu encore améliorer ce projet, si nous avions disposé de plus de temps, en améliorant les visualisations Maple présentées, et en testant les méthodes d'interpolation sur un panel de fonctions encore plus large.